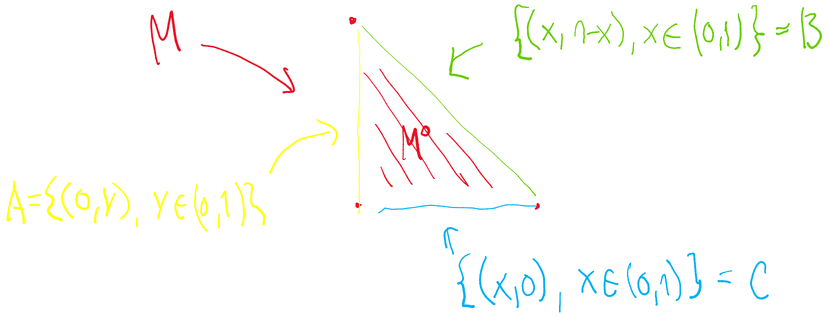
(1) $f(x,y) = x^2 + y$ , $M = \{(x,y): x,y \geq 0, x+y \leq 1\}$

- $f$ je spojitá a $M$ kompaktní - $f$ tedy nabývá na $M$ globálního minima i maxima

Hledáme body možných lokálních extrémů:




- $M^0 = \{(x,y): x>0, y>0, x+y<1\}$

$$\nabla f(x,y) = (2x, 1) \neq (0,0)$$

- množina A $\rightarrow$ $f(0,y) = y = g_A(y)$ , $g_A'(y) = 1 \,(\neq 0)$

- množina B $\rightarrow$ $f(x, 1-x) = x^2 + 1 - x = g_B(x)$, $x \in (0,1)$ , $g_B'(x) = 2x - 1$ $(= 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2})$

- množina C $\rightarrow$ $f(x,0) = x^2 = g_C(x)$, $x \in (0,1)$ , $g_C'(x) = 2x$ $(= 0 \Leftrightarrow x = 0 \notin (0,1))$

- vrcholy jsou vždy podezřelé!

Má-li bod být bodem globálního extrému, musí být i bodem lokálního extrému, tedy jeden s bodů $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \in B$ (stacionární bod $g_B$)

$(0,0), (0,1), (1,0)$ – vrcholy

$f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$

$f(0,0) = 0$ – globální minimum

$\left.\begin{array}{l} f(0,1) = 1 \\ f(1,0) = 1 \end{array}\right\}$ globální maximum

(2) viz tutoriál

(3) $f(x,y,z) = xyz$, $M = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = 1\}$ (nemá vnitřek - Lagrangeovy multiplikátory)

- M kompaktní, f spojitá → existují globální extrémy

$\nabla f = (yz, xz, xy)$

$M = \{(x,y,z) : g(x,y,z) = 0\}$ pro $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1$

$\nabla g = (2x, 2y, 2z)$ - $= 0 \iff x = y = z = 0$, $(0,0,0) \notin M$

Máme soustavu

$$\left.\begin{aligned} yz &= 2\lambda x \\ xz &= 2\lambda y \\ xy &= 2\lambda z \end{aligned}\right\} \nabla f = \lambda \nabla g \qquad (*)$$

$$x^2+y^2+z^2 = 1 \quad \leftarrow g = 0 \qquad (**)$$

$x = 0 \Rightarrow yz = 0 \Rightarrow (y = 0) \vee (z = 0)$

$\downarrow$ (**) $\downarrow$

$(0,0,\pm 1)$ $(0,\pm 1,0)$

Obdobně $y = 0 \to (\pm 1,0,0), (0,0,\pm 1)$

$z = 0 \to (\pm 1,0,0), (0,\pm 1,0)$

Pro $x,y,z \neq 0$

$(*) \to \dfrac{yz}{x} = \dfrac{xz}{y} = \dfrac{xy}{z} \to x^2 = y^2 = z^2 \overset{(**)}{\to} \left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ (8 bodů)

Celkem máme 14 bodů

$(\pm 1,0,0), (0,\pm 1,0), (0,0,\pm 1) \longrightarrow f = 0$ (není globální extrém)

$$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \to f = \begin{cases} \frac{1}{3\sqrt{3}}, & \text{sudý počet mínusů - body maxima (4 body)} \\ -\frac{1}{3\sqrt{3}}, & \text{lichý počet mínusů - body minima (4 body)} \end{cases}$$

(4) $f(x,y) = -y^2 + x^2 + \frac{4}{3}x^3$ , $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 4, x \le 0\}$

$$M = \underbrace{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2<4, x<0\}}_{M^0} \cup \underbrace{\{(x,y): x^2+y^2=4, x<0\}}_{M_1 \text{ - otevřená půlkružnice}} \cup \underbrace{\{(x,y): x=0, y\in(-2,2)\}}_{M_2 \text{ - otevřená úsečka}} \cup \underbrace{\{(0,-2),(0,+2)\}}_{\text{vrcholy}}$$

- M kompaktní, f spojitá – existují globální extrémy

- $M^0$ – $\nabla f(x,y) = (2x+4x^2, -2y)$ $\left( = (0,0) \iff x = 0, -\frac{1}{2};\ y=0 \to (0,0) \notin M^0,\ (-\frac{1}{2},0) \in M^0 \right)$

- $M_1$ – Lagrangeovy multiplikátory $\left( M_1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^-\times\mathbb{R},\ \underbrace{x^2+y^2-4}_{g(x,y)}=0\} \right)$

  $\nabla g(x,y) = (2x, 2y)$ $\quad -\ = 0 \iff x=y=0,\ (0,0)\notin M_1$

$$\left.\begin{aligned} 2x+4x^2 &= 2\lambda x \\ -2y &= 2\lambda y \end{aligned}\right\} \nabla f = \lambda \nabla g \qquad (*)$$

$$x^2+y^2=4 \qquad - \ g=0 \qquad (**)$$

$y=0 \to x=\pm 2$ $\quad \overset{x>0}{\cancel{(2,0)}}, (-2,0)$

$$(**) \left\{\begin{aligned} y\neq 0 &\to \lambda=-1 \\ x<0 &\to 1+2x=\lambda \end{aligned}\right\} \Rightarrow 1+2x=-1 \overset{(*)}{\to} x=-1,\ y=\pm\sqrt{3} \quad (-1,\sqrt{3}), (-1,-\sqrt{3})$$

$M_2$ – $x=0 \to f(0,y) = -y^2 = g(y)$, $g'(y) = -2y = 0 \iff y=0 \in (-2,2)$

Celkem 4 body

$$f(-\tfrac{1}{2},0) = \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{6} = \tfrac{1}{12} \quad (\text{maximum})$$

$$f(-2,0) = 4 - \tfrac{32}{3} = -\tfrac{20}{3} \quad (\text{minimum})$$

$$f(-1,\sqrt{3}) = -3 + 1 - \tfrac{4}{3} = -\tfrac{10}{3}$$

$$f(-1,-\sqrt{3}) = -3 + 1 + \tfrac{4}{3} = -\tfrac{2}{3}$$

(5) $f(x,y,z) = xyz \quad M = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2=1, x+y+z=0\}$

- $f$ spojitá $M$ kompaktní

- Lagrangeovy multiplikátory $\quad M = \{(x,y,z) : \underbrace{x^2+y^2+z^2-1=0}_{g}, \underbrace{x+y+z=0}_{h}$

$\nabla f = (yz, xz, xy)$

$\nabla g = (2x, 2y, 2z)$

$\nabla h = (1,1,1)$

$\Big\}$ lineárně závislé pro $x=y=z \xrightarrow{g=0} \pm\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \notin M$

$$\left.\begin{aligned} yz &= 2\lambda x + \kappa \\ xz &= 2\lambda y + \kappa \\ xy &= 2\lambda z + \kappa \end{aligned}\right\} \nabla f = \lambda \nabla g + \kappa \nabla h \qquad (*)$$

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= 1 \\ x+y+z &= 0 \end{aligned}\right\} g = h = 0 \qquad (**)$$

$$yz - 2\lambda x = xz - 2\lambda y = xy - 2\lambda z$$

$$z(y-x) = -2\lambda(y-x) \to x=y \to z=-2x \to x^2+x^2+4x^2=1 \to x = \pm\tfrac{1}{\sqrt{6}}$$

$$\searrow -2\lambda = z \to xz + yz = xy + z^2 \to (x-z)(z-y) = 0$$

Ze symetrie vždy dostaneme jednu z rovností $x=y$, $y=z$, $x=z$ odtud řešení:

$$\underbrace{\pm\left(\frac{1}{\sqrt6},\frac{1}{\sqrt6},-\frac{2}{\sqrt6}\right)}_{A^\pm},\quad \underbrace{\pm\left(\frac{1}{\sqrt6},-\frac{2}{\sqrt6},\frac{1}{\sqrt6}\right)}_{B^\pm},\quad \underbrace{\pm\left(-\frac{2}{\sqrt6},\frac{1}{\sqrt6},\frac{1}{\sqrt6}\right)}_{C^\pm}$$

Celkově:

$$f(A^+)=f(B^+)=f(C^+)=-\frac{1}{3\sqrt6} \quad \text{(minimum)}$$

$$f(A^-)=f(B^-)=f(C^-)=\frac{1}{3\sqrt6} \quad \text{(maximum)}$$

(6) $f(x,y,z)=x^2+y^2+z+2xz$, $M=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x^2+y^2+z^2=1,\ x=y^2+z^2\}$

$$M=\{(x,y,z): \underbrace{x^2+y^2+z^2-1}_{g(x,y,z)}=0,\ \underbrace{y^2+z^2-x}_{h(x,y,z)}=0\}$$

$f$ spojitá, $M$ kompaktní $\to$ globální extrémy existují

Lagrangeovy multiplikátory

$$\nabla f=(2x+2z,\ 2y,\ 1+2x),\qquad \underbrace{\nabla g=(2x,2y,2z),\quad \nabla h=(-1,2y,2z)}$$

lin. závislé pro $y=z=-1 \xrightarrow{h=0} (x^2=-1)$ (nemá řešení)

$y=z=0 \to (x=0)\wedge(x=1)$ (nemá řešení)

$$\left.\begin{aligned} 2x+2z &= 2\lambda x-\kappa \\ 2y &= 2\lambda y+2\kappa y \\ 1+2x &= 2\lambda z+2\kappa z \end{aligned}\right\}\ \nabla f=\lambda\nabla g+\kappa\nabla h$$

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= 1 \\ y^2+z^2 &= x \end{aligned}\right\}\ g=h=0$$

$2y=2\lambda y+2\kappa y$:

- $y=0 \to x=z^2,\ x^2+z^2=1 \to x^2+x=1 \to x\overset{x\geq 0}{=}\frac{\sqrt5-1}{2},\ z=\pm\sqrt{\frac{\sqrt5-1}{2}}$
- $\kappa+\lambda=1 \to 1+2x=2z \to x=z-\frac12 \to y^2+z^2=z-\frac12$

$$y^2+z^2=1-z^2+z-\frac14$$

$\rightarrow \quad z-\frac{1}{2} = -z^2+z+\frac{3}{4} \rightarrow z^2=\frac{5}{4} \Rightarrow z=\pm\frac{\sqrt{5}}{2} \rightarrow y^2 = z-\frac{1}{2}-z^2<0$ (nemá řešení)

Celkem

$$f\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, 0, \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right) > 0 \quad \text{(maximum)}$$

$$f\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, 0, -\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right) < 0 \quad \text{(minimum)}$$

(7)

$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2=z^2,\ 3z+3=x\}$

Vzdálenost bodu $(x,y,z)$ od počátku je $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Tato funkce má ovšem extrémy ve stejných bodech jako $\underbrace{x^2+y^2+z^2}_{= f(x,y,z)}$, se kterou se bude lépe počítat.

$\nabla f = (2x, 2y, 2z)$

$M = \{(x,y,z) : \underbrace{x^2+y^2-z^2}_{g(x,y,z)}=0,\ \underbrace{-x+3z+3}_{h(x,y,z)}=0\}$

$$\left.\begin{array}{l}\nabla g = (2x, 2y, -2z)\\ \nabla h = (-1, 0, 3)\end{array}\right\} \text{lin. závislé pro } \left.\begin{array}{l} y=0 \\ z=3x \end{array}\right\} \Rightarrow x^2=z^2=9x^2 \Rightarrow x=0 \Rightarrow (z=0) \wedge (z=-1)$$

nebo $x=y=z \Rightarrow 3=0 \leftarrow$ (nemá řešení)

Lagrangeovy multiplikátory

$$\left.\begin{array}{l} 2x = 2\lambda x - \kappa \\ 2y = 2\lambda y \\ 2z = -2\lambda z + 3\kappa \end{array}\right\} \nabla f = \lambda \nabla g + \kappa \nabla h \qquad (*)$$

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2=z^2 \\ x = 3z+3 \end{array}\right\} g=h=0 \qquad (**)$$

$$(*) \rightarrow \begin{cases} y=0 \rightarrow z^2 = x^2 = (3z+3)^2 = 9z^2+18z+9 \rightarrow z = -\frac{3}{2}, -\frac{3}{4} \rightarrow \left(-\frac{3}{2}, 0, -\frac{3}{2}\right), \left(-\frac{3}{4}, 0, -\frac{3}{4}\right) \\ \lambda = 1 \rightarrow \begin{cases} x = -\kappa \\ 4z = 3\kappa \end{cases} \rightarrow 4z = -3x \rightarrow y^2 = z^2 - \frac{16}{9}z^2 < 0 \quad \text{(nemá řešení)} \end{cases}$$

$$f\left(-\tfrac{3}{2}, 0, -\tfrac{3}{2}\right) > f\left(-\tfrac{3}{4}, 0, -\tfrac{3}{4}\right) \leftarrow \text{minimum}$$

(8) $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y=2,\ x^2+y^2+z^2=4\}$

Vzdálenost bodu $(x,y,z)$ od příslušné nadroviny je (kladným) násobkem $|(x,y,z)\cdot(1,2,3)| = |x+2y+3z|$.

Zvolme $f(x,y,z) = x+2y+3z$, potom bod maxima funkce $|x+2y+3z|$ bude bodem maxima, nebo bodem minima $f$ vzhledem k $M$.

Extrémy $f$ vzhledem k $M$:

$$M = \{(x,y,z) : \underbrace{x+y-2}_{g(x,y,z)} = 0,\ \underbrace{x^2+y^2+z^2-4}_{h(x,y,z)} = 0\}$$

$$\nabla f = (1,2,3)$$

$$\left.\begin{array}{l} \nabla g = (1,2,0) \\ \nabla h = (2x,2y,2z) \end{array}\right\} \text{lin. závislé pro} \begin{cases} x=y=z=0 & ((0,0,0) \notin M) \\ (z=0)\wedge(y=2x) \rightarrow x=1, y=2, & 1^2+0^2+2^2 \neq 4 \end{cases}$$

Lagrangeovy multiplikátory:

$$\left.\begin{array}{l} 1 = \lambda + 2\kappa x \\ 2 = 2\lambda + 2\kappa y \\ 3 = 2\kappa z \end{array}\right\} \nabla f = \lambda \nabla g + \kappa \nabla h \qquad (*)$$

$$\left.\begin{array}{l} x+y=2 \\ x^2+y^2+z^2=4 \end{array}\right\} g=h=0 \qquad (**)$$

$$(*) \Rightarrow 2x(y-2x)=0 \begin{cases} y=2x \rightarrow x=\frac{2}{3},\ y=\frac{4}{3},\ z^2=\frac{16}{9} \rightarrow \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \pm\frac{4}{3}\right) \\ x=0 \rightarrow 3=0 \quad \text{(nemá řešení)} \end{cases}$$

$$f\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) = \frac{2}{3} + \frac{8}{3} + 4 = \frac{22}{3} \leftarrow \text{maximum } f \text{ i } |f|.$$

$$f\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right) = \frac{2}{3} + \frac{8}{3} - 4 = \frac{2}{3}$$